

III. Chyby měření a zpracování naměřených výsledků

1. Obecné úvahy

Při měření nějaké fyzikální veličiny můžeme zásadně rozlišit dva případy:

- 1.) několikrát po sobě měříme veličinu, která je konstantní (v průběhu měření se nemění),
- 2.) měřená veličina sama o sobě fluktuuje.

Příklady na případ 1.) najdeme zpravidla v makrosvětě (měření délky tyče, plochy průřezu, hmotnosti tělesa, doby kmitu fyzického kyvadla (časového intervalu), intenzity světla), příklady na případ 2.) zpravidla v mikrosvětě (počet aktů radioaktivního rozpadu, počet dopadlých fotonů světla na detektor při dané intenzitě světla, počet šestek, který padne při jistém počtu hodů kostkou, počet lidí prošlých dveřmi do obchodu za určitý časový interval).

I v případě 1.), kdy se veličina nemění, přístroj pracuje stále stejně (s jistou neurčitostí) a pozorovatel pracuje stále stejně (s jistou nahodilostí odečítání z přístroje) se jednotlivá měření od sebe liší. Říkáme, že se dopouštíme *náhodných chyb*. Vedle toho se můžeme dopustit *hrubých chyb* (omyl při odečtení nebo zapsání údaje, špatná či chybná funkce přístroje, nesprávně nastavené některé podmínky pokusu) nebo *systematických chyb* (zpoždění při spouštění stopek, nesprávná stupnice přístroje, použitý vztah pro výpočet veličiny platí jen přibližně).

Hrubých chyb se musíme vyvarovat.

Systematické chyby můžeme rozpoznat a opravit. U cvičeného pozorovatele je reakční doba pro spouštění stopek stálá a dá se změřit, kromě toho je stejná jako reakční doba při zastavení stopek, takže interval je změřen přesněji. Nesprávnou stupnici přístroje můžeme překalibrovat pomocí přesnějšího přístroje a pořídit k ní korekční tabulku nebo korekční křivku. Chybu vzniklou použitím přibližného vztahu se podrobnějším rozbořem snažíme odhadnout. Můžeme také provést měření jinou metodou (třeba přesnější a zpravidla náročnější) a soustavnou chybu odhadnout srovnáním výsledků.

Náhodné chyby jsou přirozenou součástí měření, nelze je odstranit.

V případě 2.), kdy měřená veličina sama fluktuuje, se snažíme takovou veličinu odhadnout (stanovit) s jistou chybou stanovení. Např. měřením radioaktivních rozpadů za časový interval se snažíme určit aktivitu radioaktivního zářiče, měřením počtu fotonů zaregistrovaných detektorem za časový interval se snažíme určit průměrný počet dopadajících fotonů, opakovaným házením kostkou a určováním počtu padlých šestek ku počtu pokusů se snažíme určit pravděpodobnost, s kterou šestka na kostce při vrzích padá, stanovíme průměrný počet lidí, které projdou dveřmi do obchodu za určitý časový interval.

S měřením veličin, které samy o sobě fluktuují, se setkáte v laboratorních cvičeních k fyzice II, zde je nebudeme podrobněji rozebírat. Pojednáme však podrobněji o případech, kdy měřená veličina je konstantní a chyby jsou náhodné.

Náhodnou chybou jednoho měření budeme rozumět rozdíl

$$\Delta a_i = a_i - a, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (III.1)$$

kde a_i je hodnota veličiny zjištěná při i -tém měření, a je skutečná hodnota veličiny, N je počet měření. Chyba Δa_i může být kladná nebo záporná.

Relativní chybou se nazývá poměr $\Delta a_i/a$, vyjádřeno v procentech $100 \cdot \Delta a_i/a$.

Chybu Δa_i resp. relativní chybu $\Delta a_i/a$ nemůžeme přímo určit, protože skutečnou hodnotu a neznáme. Můžeme ji však obvykle dosti dobře z naměřených hodnot odhadnout.

V dalším výkladu si ukážeme, jak se tato chyba dá zjistit před měřením a jak se její pravděpodobná velikost z naměřených výsledků stanoví.

2. Odhad chyby před měřením.

U *přímého měření* veličiny y můžeme na základě známé přesnosti měřících přístrojů a měřicí metody odhadnout, jaké chyby Δy se dopustíme.

Chyba měřících přístrojů Δy_p se u jednoduchých přístrojů odhaduje, u složitějších bývá uvedena v dokumentaci k přístroji. Můžeme např. uvést, že pásové měřítko má chybu přibližně 1 mm, mikrometr 10^{-2} mm, kontaktní měřítko 10^{-1} mm, mechanické stopky $2 \cdot 10^{-1}$ s, elektronické stopky s automatickým vypínáním 10^{-4} s a často i menší, analytické váhy 1 mg, chyba ručkových elektrických přístrojů je dána jejich třídou přesnosti (viz kapitola II., str. 14), chyba odporů na odporových dekádách bývá uvedena na štítku.

Chybu metody Δy_m zjistíme statistickými postupy dále popsány v článku 3 této kapitoly.

Celková chyba Δy určení veličiny y se vypočte buď jako součet chyb Δy_p a Δy_m (chyby Δy_p a Δy_m pokládáme za kladné veličiny)

$$\Delta y = \Delta y_p + \Delta y_m \quad (\text{III.2})$$

nebo podle výrazu

$$\Delta y = \sqrt{(\Delta y_p)^2 + (\Delta y_m)^2} \quad (\text{III.3})$$

V prvním případě mluvíme o *maximální celkové chybě*, v druhém o *střední celkové chybě*. Rozdíly mezi oběma odhady nejsou podstatné, protože často výrazně převažuje jeden ze zdrojů chyb, buď Δy_p nebo Δy_m a i při stejných hodnotách se hodnoty liší o $\sqrt{2}$ -násobek, což při přibližnosti odhadů nebývá podstatné.

U *nepřímého měření* hledanou veličinu získáme na základě *přímého měření* jiných veličin (např. modul pružnosti v tahu získáme na základě měření délky a průřezu drátu, hmotnosti závaží a prodloužení drátu, hustotu skleněných kuliček na základě zjištění jejich hmotnosti a objemu, gravitační zrychlení na základě změření doby kyvu a vzdálenosti britů u reverzního kyvadla, odpor rezistoru na základě měření napětí na něm a proudu jím procházejícím), když známe závislost hledané veličiny na měřených veličinách. Hledaná veličina y je tedy funkcí n měřených veličin x_1, x_2, \dots, x_n .

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{III.4})$$

Pro odchylku $\Delta y'$ (může být kladná i záporná) platí v lineárním přiblížení vztah (podrobně viz teorie diferenciálu funkce více proměnných)

$$\Delta y' \doteq \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \Delta x_n \quad (\text{III.5})$$

kde $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ jsou chyby přímo měřených veličin (tedy vesměs kladné veličiny), v kterých jsou zahrnuty jak chyby užitých měřících přístrojů Δx_{ip} , tak chyby metody Δx_{im} ; výpočet Δx_i se provede podle (III.2) nebo (III.3). Výrazy $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou parciální derivace funkce f podle jednotlivých proměnných x_i , tedy míry toho, jak ostře veličina y na dané veličině x_i závisí. Při odhadu chyby Δy výsledku měření, který provádíme před měřením, uvažujeme často nejnepříznivější případ, tj. že všechny chyby stanovení přímo měřených veličin se sčítají;

$$\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta x_n \quad (\text{III.6})$$

Takový odhad v analogii s (III.2) označujeme jako *maximální*. Odhad Δy můžeme též udělat analogicky s (III.3) podle vzorce

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 (\Delta x_2)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 (\Delta x_n)^2} \quad (\text{III.7})$$

Tento mírnější odhad, kterým získáme *střední celkovou chybu*, je někdy zvláště při velkých hodnotách čísla n realističtější, je však podstatně pracnější.

Jako příklad odhadneme chybu měření tíhového zrychlení g reverzním kyvadlem. Z úlohy č. 4 (Měření tíhového zrychlení) vyplývá, že g stanovíme ze vzorce

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = g(l, T) \quad , \quad (\text{III.8})$$

kde l je vzdálenost břitů reverzního kyvadla a T je doba kmitu, splňuje-li kyvadlo podmínku, že kolem obou břitů kývá se stejnou dobou kmitu. Aplikací vzorce (III.6) dostáváme pro chybu Δg postupně

$$\Delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial l} \right| \Delta l + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| \Delta T \quad ,$$

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{T^2} \Delta l + \frac{8\pi^2 l}{T^3} \Delta T$$

a pro relativní chybu $\frac{\Delta g}{g}$;

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T} \quad .$$

Výsledek ukazuje, že je vhodné měřit čas s dvojnásobnou relativní přesností v porovnání s měřením délky, a že změříme-li čas s 0,5% relativní chybou a délku s 1% relativní chybou, získáme výsledek s 2% relativní chybou. I v praxi je však možné dosáhnout podstatně lepší přesnosti měření, relativní chybu výsledku lze snížit na hodnotu 0,1%. Délku l , která je asi 1 m, lze měřit i pásovým měřítkem ($\Delta l = 10^{-3}$ m, relativní přesnost 0,1%). Chyba v tomto případě je dána chybou přístroje Δl_p , chyba metody Δl_m je zanedbatelná. Doba kmitu T bývá řádově sekunda. Pro relativní přesnost 0,05% je potom nutno chybu ΔT snížit na hodnotu $5 \cdot 10^{-4}$ s. Tuto přesnost lze při elektronickém snímání doby kmitu dosáhnout, při ručním měření si lze pomoci tím, že se měří větší počet kmitů, ale i pak dosáhneme nejlépe hodnoty $\Delta T/T = 10^{-3}$, tedy 0,1% a chybu výsledku pak můžeme odhadnout na hodnotu asi 0,3%. Při ručním měření doby kmitu je převažující v ΔT chyba metody, proto je vhodné provádět větší počet měření jedné doby kmitu. Při elektronickém snímání je chyba metody menší než chyba při nastavení shodnosti doby kmitu kolem obou os, která zde dává hodnotu ΔT . Při měření s přesností 0,1% se též do výsledku začnou promítat systematické chyby způsobené konečným rozkmitem kyvadla a tím, že reverzní kyvadlo v praxi kývá ve vzduchu a ne ve vakuu, jako je tomu u reverzních kyvadel určených pro vědecké účely (geofyzikální a geologická měření). S uvažováním těchto systematických chyb se jeví přesnost asi 0,2% pro stanovení g v podmínkách praktik jako mezní.

Na uvedeném případě jsme si ukázali, jak můžeme před měřením provést odhad chyby. Máme-li zadány přístroje a určeny metody měření, můžeme odhadnout chybu výsledku. Odhad chyby nám říká, s jakou přesností máme měřit jednotlivé veličiny a na kolik míst máme uvádět hodnoty v mezivýpočtech a univerzální konstanty: v mezivýpočtech uvádíme o jedno až dvě místa více, než odpovídá relativní přesnosti měření – při měření s 1% relativní přesností uvádíme tedy čtyři, nejvýše pět, míst.

Odhad nám umožňuje řešit i opačnou úlohu: stanovit, s jakou přesností musíme měřit veličiny x_i , když si zadáme, s jakou přesností chceme měřit hodnotu y . Tato úloha není určitá. Dané hodnoty Δy můžeme dosáhnout při různých hodnotách Δx_i na pravé straně rovnice (III.6), resp. (III.7). Jak postupujeme při řešení úlohy? Nejmenší hodnoty některých sčítanců jsou dány našimi měřicími možnostmi. Vzhledem k těmto limitujícím hodnotám doplníme ostatní sčítance tak, aby součet dal požadovanou hodnotu. Při tom si však musíme uvědomit, že nemá cenu neúměrně snižovat hodnotu jednoho sčítance vzhledem k druhému (zvyšovat neúměrně přesnost měření jedné veličiny vůči přesnosti měření veličiny druhé). Zhruba je možno říci, že jednotlivé sčítance v (III.6) se nemají lišit více než $10\times$. Není-li hodnota žádného sčítance měřicími možnostmi zdola omezena, volíme při dané hodnotě součtu všechny sčítance na pravé straně rovnice (III.6) resp. (III.7) stejně velké, a tak

získáme podmínky pro přesnost měření jednotlivých veličin x_i . V probraném případě měření tíhového zrychlení g z této podmínky plyne, že relativní přesnost měření času T musí být dvojnásobná než relativní přesnost měření délky l .

Uvedený příklad je zvláštním případem často se vyskytující závislosti, kdy měřená hodnota y je funkcí x_i typu

$$y = \frac{x_1^i x_2^j x_3^k}{x_4^l x_5^m} \quad , \quad (\text{III.9})$$

kde i, j, k, l, m jsou přirozená čísla.

Pak relativní chyba výsledku

$$\frac{\Delta y}{|y|} = k \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + j \frac{\Delta x_2}{|x_2|} + \dots + m \frac{\Delta x_5}{|x_5|} \quad .$$

Relativní chyby měřených veličin přispívají k relativní chybě výsledku úměrně mocnině, v které se ve výrazu (III.9) vyskytují.

Dalším pro rozbor chyb měření důležitým případem závislosti $y = y(x_i)$ je algebraický součet

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad . \quad (\text{III.10})$$

Probereme si jej podrobněji pro případ dvou měřených veličin x_1, x_2 , přičemž budeme předpokládat, že obě jsou kladné. Je-li měřená veličina y dána součtem přímo měřených veličin

$$y = x_1 + x_2 \quad , \quad (\text{III.11})$$

dostáváme podle (III.6)

$$\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2 \quad .$$

Chyby se sčítají. Pro relativní chybu dostáváme

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1 + x_2} + \frac{\Delta x_2}{x_1 + x_2} \leq \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \quad . \quad (\text{III.12})$$

Relativní chyba výsledku měření daného součtem hodnot přímo měřených veličin je tedy nejvýše rovna součtu relativních chyb přímo měřených veličin.

Daleko větší opatrnosti je třeba, když hodnota měřené veličiny y je dána rozdílem přímo měřených veličin x_1, x_2

$$y = x_1 - x_2 \quad . \quad (\text{III.13})$$

Potom

$$\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2 \quad ,$$

stejně jako v případě součtu, ale relativní chyba

$$\frac{\Delta y}{|y|} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{|x_1 - x_2|} > \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \quad (\text{III.14})$$

může být i podstatně větší než součet relativních chyb přímo měřených veličin, když je rozdíl měřených veličin malý.

Rozdílová měření jsou velmi obvyklá. V úlohách, které budete v praktiku měřit se často vyskytují. Budete např. zjišťovat moment setrvačnosti torzního kyvadla z rozdílu dob kmitu kyvadla bez přívazku a s přívazkem, hustotu kapalin pyknometrem, tepelnou kapacitu na základě rozdílu teplot. Uděláme proto kvantitativní odhad pro chybu měření rozdílu $T_1 - T_2$ dob kmitu torzního kyvadla.

Aby byl rozdíl $T_1 - T_2$ určen s dostatečnou přesností, nestačí jen přesně měřit hodnoty T_1 a T_2 , ale rozdíl momentů setrvačnosti musí být natolik velký, aby hodnota rozdílu $|T_1 - T_2|$ nebyla příliš malá. Jsou-li např. doby kmitu T_1 a T_2 v okolí 1 s a změříme-li je s relativní přesností 1%, dostaneme $\Delta T_1 = \frac{\Delta T_1}{T_1} \cdot T_1 = 10^{-2} \text{ s} = \Delta T_2$. Kdyby rozdíl dob kmitů T_1 a T_2 byl 0,1 s, dostali bychom z (III.13) pro relativní chybu stanovení rozdílu

$$\frac{(T_1 - T_2)}{|T_1 - T_2|} = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{|T_1 - T_2|} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{10^{-1}} = 2 \cdot 10^{-1} \quad .$$

Relativní chyba určení rozdílu je 20%, tedy $20 \times$ větší než relativní chyba měření časů T_1, T_2 . Nejméně s touto chybou bude určen moment setrvačnosti. Tuto nedostatečnou přesnost lze v uvedeném příkladě dostat na přijatelnou míru zpřesněním měření T_1, T_2 na 0,1% a zvětšením rozdílu $T_1 - T_2$. Přesto ale tento příklad ukazuje rizika rozdílových měření.

Odhad chyby je vždy prováděn pouze pro určité okolí hodnot x_1, x_2, \dots, x_n přímo měřených veličin (parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou totiž obecně funkcemi x_1, x_2, \dots, x_n). Je tedy při něm nutno přihlížet ke konkrétnímu uspořádání měření, k hodnotám x_1, x_2, \dots, x_n , které se v tomto uspořádání vyskytují. Odhad pro jedno uspořádání nelze mechanicky převzít pro jiná uspořádání. Přirozeně se vyskytne i otázka, v jakém uspořádání – pro jaké zvolené hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n – bude měření nejpřesnější. Obecné řešení otázky se málokdy dělá úplným matematickým rozбором jako hledání minima funkce více proměnných, nejen pro jistou obtížnost, ale též pro nutnost zahrnout do výpočtu i další podmínky, jakými jsou např. různá přesnost měřících přístrojů v různých oborech proměnných x_1, x_2, \dots, x_n .

Pro objasnění problematiky probereme nyní jeden relativně snadno řešitelný příklad hledání optimálních podmínek měření. Najdeme, pro jaké poměry odporů měří Wheatstoneův most nejpřesněji. Pro výpočet si představíme elementární uspořádání Wheatstoneova mostu, kde odpory R_1, R_2 se vydělují pojižděním jezdce po odporovém drátě (viz obr. III.1).

Měření odpor R_x stanovíme z rovnice

$$R_x = \frac{R_0 R_1}{R_2} \quad . \quad (\text{III.15})$$

(Viz úloha č. 11 – Měření odporů Wheatstoneovým mostem.)

V rovnici (III.15) jsou R_1, R_2 odpory úseků drátu v případě, kdy se nám podaří posunem jezdce vynulovat proud v ampérmetru A. Pro chybu měření ΔR_x dostáváme z (III.6)

$$\Delta R_x = \left| \frac{\partial R_x}{\partial R_0} \right| \Delta R_0 + \left| \frac{\partial R_x}{\partial R_1} \right| \Delta R_1 + \left| \frac{\partial R_x}{\partial R_2} \right| \Delta R_2 \quad .$$

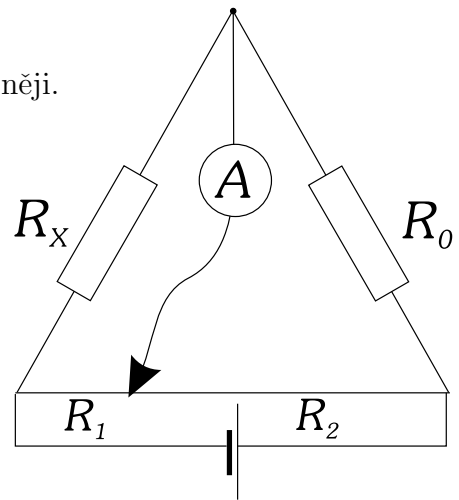
Výpočtem absolutních hodnot parciálních derivací dostaneme

$$\Delta R_x = \frac{R_1}{R_2} \Delta R_0 + \frac{R_0}{R_2} \Delta R_1 + \frac{R_0 R_1}{R_2^2} \Delta R_2 \quad .$$

Vzhledem k uspořádání pokusu je však $\Delta R_1 = -\Delta R_2$, a tedy

$$\Delta R_x = \frac{R_1}{R_2} \Delta R_0 + \frac{R_0}{R_2} \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \Delta R_1 \quad .$$

V případě, že $R_1 = R_2$, příspěvek k chybě z druhého sčítance odpadá a chyba ΔR_x bude nejmenší. Je-li $R_1 = R_2$, musí však podle (III.15) platit i $R_0 = R_x$. Nejpřesněji lze na můstku měřit, když vztažený odpor R_0 je roven odporu R_x . Optimální podmínky měření na Wheatstoneově mostě jsou



Obr. III.1. Wheatstoneův most

takové, že vztažný odpor R_0 má hodnoty blízké k měřenému odporu R_x . Tutu podmínku dodržíme tím, že v případě řádového rozdílu mezi R_x a R_0 nahradíme odpor R_0 odporem R'_0 tak, aby byla dosažena řádová shoda mezi odpory R_x a R'_0 . Zpravidla tato úprava Wheastoneova mostu je možná.

Závěrem si ještě všimneme zvláštního případu, kdy relativní chyba měření veličiny y je stejná v celém oboru měřené veličiny x . Tento případ nastává, když závislost je exponenciální;

$$y = e^{kx} \quad .$$

Potom

$$\Delta y = \left| \frac{dy}{dx} \right| \Delta x = k e^{kx} \Delta x$$

a

$$\frac{\Delta y}{y} = k \Delta x \quad .$$

Relativní chyba y je úměrná absolutní chybě x . To je specifická vlastnost exponenciální funkce, zvané též zákon přirozeného růstu, která plyne z toho, že u exponenciální funkce přírůstek funkce je úměrný její hodnotě.

3. Stanovení chyby měření jedné fyzikální veličiny.

Při měření ve fyzikálním praktiku jste nejčastěji postaveni před úkol změřit hodnotu fyzikální veličiny, jejíž hodnota je známá (např. určit tíhové zrychlení g , určit hustotu lihu), nebo stanovit závislost jedné fyzikální veličiny na druhé (např. stanovení závislosti elektrického odporu nějaké látky na teplotě). Na rozdíl od měření v běžném životě, když např. pro výpočet nájemného určujete plochu bytu, je na vás požadováno, abyste kromě stanovení hodnoty fyzikální veličiny nebo stanovení závislosti jedné fyzikální veličiny na druhé určili i míru toho, jak se lze na vámi stanovenou hodnotu spolehnout. Tuto míru, kterou z provedených měření lze jen odhadnout – proto ji uvádíme vždy jen na jednu platnou číslici ¹ – označujeme jako *chybu měření*. Měření je připraveno tak, aby systematické chyby byly potlačeny pod míru přesnosti měření nebo je udán postup, jak je snížit pod tuto míru početní korekcí. Vaše měření by mělo být zatíženo jen náhodnými chybami. O tom, zda je to pravda, se přesvědčíte po zpracování měření. Známý výsledek (např. hodnota tíhového zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) by se měl shodovat s vámi naměřenou hodnotou v *mezích pozorovacích chyb*, což znamená, že by rozdíl obou hodnot měl být menší, než je chyba měření. Je-li tomu tak, měřili jste dobře. Není-li tomu tak, musíte hledat, co bylo uděláno špatně.

Pro ukázání, jak lze statistickými metodami zpracovat výsledek měření, je nejjednodušší případ, kdy měříme hodnotu nějaké veličiny přístrojem, jehož přesnost je větší, než je přesnost použité metody. Budeme-li např. měřit délku 10 m měřítkem, které má dělení po 1 m, naměříme vždy stejnou hodnotu 10 m. Budeme-li tutéž délku měřit několikrát pásovým měřítkem s dělením po 1 mm, budou výsledky měření vlivem celé řady vnějších příčin (různě napnuté měřítko, různé nastavení značek k měřené délce, změny teploty) od sebe lišit. Dostaneme tak sérii hodnot naměřené délky a , jejichž statistickým zpracováním metodami teorie chyb (viz např. [1], [2], [3]) stanovíme nejpravděpodobnější hodnotu měřené délky a a chybu měření.

Při výpočtech v teorii chyb se užívá představy *náhodných chyb*, tj. chyb, jejichž výsledná hodnota vznikne spojením velkého množství nezávislých odchylek od *skutečné hodnoty měřené veličiny*, přičemž elementární odchylky jsou se stejnou pravděpodobností kladné nebo záporné. Tato představa vede při konečném počtu stejně velkých odchylek k *binomickému zákonu rozdělení chyb* a v limitě při nekonečném počtu nekonečně malých odchylek k *normálnímu* neboli *Gaussovu rozdělení*.

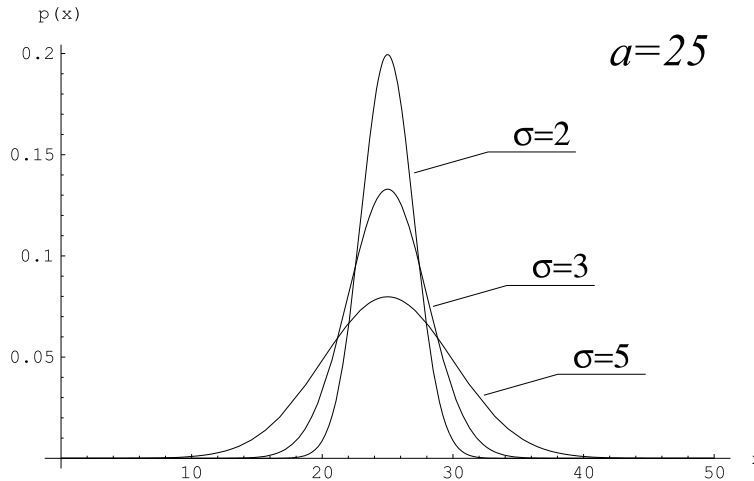
Při standardním zpracování výsledků měření se předpokládá, že rozdělení chyb měření je dáno *normálním rozdělením*

$$p(x) = \frac{dP}{dx} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad . \quad (\text{III.16})$$

¹Výjimku tvoří základní velmi pečlivá měření, kdy se chyby udávají na dvě místa; taková měření se však v praktiku neprovádějí.

V rovnici (III.16) je $p(x)$ *hustota pravděpodobnosti*, tj. *pravděpodobnost* P toho, že měřená hodnota bude v jednotkovém okolí x , e je základ přirozených logaritmů, a *skutečná hodnota měřené veličiny* a σ konstanta určující šířku rozdělení. Šířka rozdělení je mírou toho, jak chyby ovlivňují měření; z hodnoty σ , která se nazývá *směrodatná odchylka*, lze jednoduchým násobením různými konstantami určit všechny další míry přesnosti měření, jakými jsou např. *pravděpodobná* a *mezní chyba*.

Zákon normálního rozdělení závisí na dvou konstantách a a σ . Určení těchto dvou konstant z naměřených hodnot a_1, a_2, \dots, a_N je naším úkolem, tedy úkolem stanovit nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny a odhadnout, jaká je chyba tohoto stanovení.



Obr.III.2. Normální rozdělení

Na obr. III.2 jsou zakresleny křivky normálního rozdělení pro různá σ . Naměřené hodnoty přibližně určují podobu hledané křivky normálního rozdělení, a to tím lépe čím více jich je. Z teorie chyb plyne, že nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny a je *aritmetický průměr* souboru naměřených hodnot, tedy veličina

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots + a_N}{N} \quad . \quad (\text{III.17})$$

Nejpravděpodobnější hodnotu *směrodatné odchylky* σ z naměřených hodnot a_i a z právě zjištěné hodnoty \bar{a} pak určíme podle vzorce

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^2} \quad . \quad (\text{III.18})$$

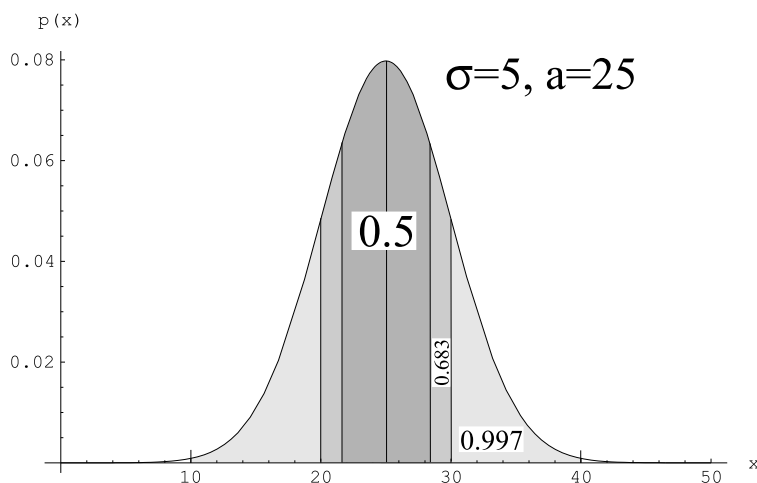
Velichina s je získána z konečného počtu naměřených hodnot, a tedy se jen blíží skutečné hodnotě směrodatné odchylky σ , podobně jako aritmetický průměr \bar{a} se jen blíží skutečné hodnotě a .

Znalost rozdělení, kterému podléhá měřená veličina, nám umožňuje pravděpodobnostně interpretovat význam *směrodatné odchylky*. Známe-li totiž hustotu pravděpodobnosti $p(x)$ (viz rovnice (III.16)), můžeme určit pravděpodobnost $P(x_1, x_2)$ toho, že měřená veličina leží v intervalu (x_1, x_2) podle vzorce

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \quad . \quad (\text{III.19})$$

Zvolíme-li za interval pás široký 2σ symetricky rozložený kolem *skutečné hodnoty* a , tedy interval $(a - \sigma, a + \sigma)$, zjistíme, že $P(a - \sigma, a + \sigma) = 0,683$. S pravděpodobností 68,3% padne naměřená hodnota veličiny a_i do tohoto pásu. Opačně, hledáme-li pás, pro který je stejná pravděpodobnost, že naměřená hodnota do tohoto pásu padne, jako že do něho nepadne, tj. pás, pro který $P = 0,5$, vychází pološířka pásu $0,675\sigma$, tedy interval $(a - 0,675\sigma, a + 0,675\sigma)$. Hodnota $0,675\sigma \doteq (2/3)\sigma$ je další často užívanou mírou přesnosti měření, která se označuje jako *pravděpodobná chyba*. Hledáme-li pás,

do kterého měřená veličina téměř jistě padne, zjistíme, že vyhovuje pás o pološírce 3σ . Do intervalu $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ padne naměřená veličina s pravděpodobností 0,997. Hodnota 3σ se nazývá *mezní chyba*. Na obr. III.3 jsou na grafu *normálního rozdělení* vyznačeny pásy odpovídající jednotlivým intervalům $(a - k\sigma, a + k\sigma)$ pro $k = 0, 675; 2; 3$ spolu s příslušnými hodnotami pravděpodobnosti P . Tyto intervaly se nazývají *intervaly spolehlivosti*.



Obr.III.3. Normální rozdělení s vyznačenými intervaly spolehlivosti

Význam *směrodatné odchylky* je vysvětlen a zavedení *pravděpodobné* a *mezní chyby* je provedeno pro skutečnou hodnotu a a *směrodatnou odchylku* σ . Úvahy však zůstávají v dobrém přiblížení v platnosti, i když nahradíme a a σ z rozboru pokusu získanými hodnotami \bar{a} a s . Jelikož všechny zmíněné veličiny slouží k odhadu chyby, je přiblížení naprosto dostatečné již při relativně malém počtu měření N . Lepší než řádový odhad chyby (i ten často pro hrubou orientaci stačí) lze provést při $N = 3$ a pro rozumný odhad na jednu platnou číslici zpravidla stačí $N \geq 5$, i když pro malý počet měření neplatí normální rozdělení (viz Studentovo rozdělení např. ve skriptech [3]).

Nyní máme již vše připraveno pro statistické zpracování výsledků měření jedné fyzikální veličiny, když předpokládáme, že měření je zatíženo pouze *náhodnými chybami* a nepřesnosti zanesené do měření měřicími přístroji (měřidly) lze zanedbat. Výsledkem měření je soubor hodnot a_i . Z tohoto souboru vypočteme dle (III.17) aritmetický průměr, tedy hodnotu \bar{a} . Výsledek zaokrouhlíme tak, aby obsahoval o jednu číslici více než hodnoty a_i . Vypočteme rozdíly $(a_i - \bar{a})$ a hodnoty dosadíme do vzorce pro výpočet *směrodatné odchylky*. Protože nám jde o určení přesnosti, s jakou jsme stanovili hodnotu aritmetického průměru \bar{a} , který pokládáme za výsledek našeho měření, neužíváme vzorec (III.18), ale užijeme vzorec

$$s = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^2} \quad (\text{III.20})$$

pro stanovení *směrodatné odchylky aritmetického průměru*. (Rovnicí (III.18) zavedená hodnota s se přesněji označuje jako *směrodatná odchylka jednoho měření*). Výsledek měření pak můžeme zapsat v některém z tvarů

$$a = \bar{a} \pm s_{\bar{a}} \quad , \quad (\text{III.21})$$

$$a = \bar{a} \pm \frac{2}{3} s_{\bar{a}} = \bar{a} \pm \vartheta \quad , \quad (\text{III.22})$$

$$a = \bar{a} \pm 3 s_{\bar{a}} \quad . \quad (\text{III.23})$$

V rovnici (III.21) je za míru přesnosti měření užita *směrodatná odchylka*, která se podle způsobu svého odvození z měřených hodnot označuje též *střední kvadratická chyba aritmetického průměru*.

V rovnici (III.22) je za míru přesnosti užita *pravděpodobná chyba* ϑ a v rovnici (III.23) *mezní chyba* $3s_{\bar{a}}$.

Dále budeme užívat jako míru přesnosti stanovení výsledku měření zatíženého pouze náhodnými chybami *střední kvadratickou chybu aritmetického průměru* (III.10) $s_{\bar{a}}$. Výsledek tedy budeme zapisovat ve tvaru (III.21).

Již na základě odhadu chyby před měřením můžeme zhruba určit, na kolik míst budeme udávat čísla, s kterými provádíme výpočty při zpracování výsledků měření. Zde je vhodné o jedno až dvě místa zvýšit počet číslic nad odhadnutou hodnotu. Jakmile vypočteme *střední kvadratickou chybu aritmetického průměru* $s_{\bar{a}}$, definitivně určíme, na kolik míst zapíšeme výsledek. Zápis výsledku končíme tím místem, kterým začíná vypočtená chyba. Vypočtenou chybu udáváme pouze na jedno místo (srov. poznámku pod čarou na str.35). Příklad právě vyloženého postupu zpracování výsledků je naznačen v tabulce 1.

$$\begin{aligned} \bar{a} &= 0,994 \text{ m} & \bar{a} &= 0,994 \text{ m} \\ \sum_{i=1}^{10} (a_i - \bar{a})^2 &= 381 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 & \sum_{i=1}^{10} (a_i - \bar{a})^+ &= 0,226 \text{ m} \\ s_{\bar{a}} &= \sqrt{\frac{381 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 9}} = 0,021 \text{ m} & s_{\bar{a}} &= \frac{0,226}{12} = 0,0188 \text{ m} \end{aligned}$$

a_i	$a_i - \bar{a}$	$(a_i - \bar{a})^2$
1,11	+0,016	$135 \cdot 10^{-4}$
0,99	-0,004	$0,2 \cdot 10^{-4}$
0,91	-0,084	$71 \cdot 10^{-4}$
1,03	+0,036	$13 \cdot 10^{-4}$
1,00	+0,006	$0,4 \cdot 10^{-4}$
1,00	+0,006	$0,4 \cdot 10^{-4}$
0,96	-0,034	$12 \cdot 10^{-4}$
1,05	+0,056	$31 \cdot 10^{-4}$
1,00	+0,006	$0,4 \cdot 10^{-4}$
0,89	-0,104	$118 \cdot 10^{-4}$

Tabulka 1: Naměřené hodnoty délky a [m].

Tam jsme vypočetli, že *aritmetický průměr* naměřených výsledků je $\bar{a} = 0,994$ m a jeho *střední kvadratická chyba* $s_{\bar{a}} = 0,021$ m. Výsledek v tabulce zpracovaného měření tedy zapíšeme v tvaru

$$a = (0,99 \pm 0,02) \text{ m}$$

nebo

$$a = (99 \pm 2) \cdot 10^{-2} \text{ m} .$$

Při ručním zpracování výsledků měření je velmi vhodný, a při uvážení již několikrát zmíněné přibližnosti výpočtu chyby dostatečně přesný, přibližný vzorec pro výpočet *střední kvadratické chyby aritmetického průměru*

$$s_{\bar{a}} = \frac{5}{2} \frac{\sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^+}{N \sqrt{N-1}} \quad (\text{III.24})$$

uvedený v knize [2] na str. 80. V tomto vzorci se počítá pouze přes kladné lineární odchylky $(a_i - \bar{a})^+$ od aritmetického průměru a součet se nakonec násobí jednoduchým číselným faktorem, který např. při $N = 5$ činí $1/12$. Postup dle vzorce (III.24) byl také použit při zpracování měření z tabulky 1. Při tomto zpracování dostaneme pro $s_{\bar{a}}$ hodnotu $0,0188$ m, která po zaokrouhlení dá stejný výsledek $s_{\bar{a}} = 0,02$ m jako při výpočtu podle vzorce (III.20).

Doposud jsme v čl. 3 předpokládali, že neznámou veličinu měříme jedním přístrojem, který ji přímo změří. Příkladem bylo měření délky pásovým měřítkem. Takové měření označujeme jako *měření přímé*. Dále jsme předpokládali, že měření je zatíženo pouze náhodnými chybami a že nepřesnost zanesenou do měření měřicím přístrojem – *měřidlem* – lze zanedbat. Získali jsme tak chybu měření, kterou dále budeme označovat jako *náhodnou chybu měření*. Máme-li určit celkovou chybu přímého měření, musíme k právě stanovené *náhodné chybě* přidat vliv *chyby měřidla*. Učiníme tak obdobně jako v případě stanovení chyby před měřením (rovnice (III.2) a (III.3)). Ke *střední kvadratické chybě aritmetického průměru* $s_{\bar{a}}$ buď přímo přičteme chybu měřidla Δy_p a pro celkovou chybu měřené veličiny tak dostaneme analogicky k (III.2)

$$u_{\bar{a}} = s_{\bar{a}} + \Delta y_p \quad (\text{III.25})$$

maximální celkovou chybu nebo pro výpočet celkové chyby uijeme vzorec analogický (III.3)

$$u_{\bar{a}} = \sqrt{(s_{\bar{a}})^2 + (\Delta y_p)^2} \quad (\text{III.26})$$

a dostaneme *střední celkovou chybu*. Vzorec (III.26) je vhodné užít při srovnatelných hodnotách veličin $s_{\bar{a}}$ a Δy_p , jinak postačí jednodušší vzorec (III.25). V příkladě z tabulky 1 přičtení vlivu chyby pásového měřítka $\Delta y_p = 0,001$ m je zanedbatelné a nahodilost tam měřených délek plyne z jiných příčin, než je nepřesnost měřidla. Kdyby však náhodná chyba měření délky byla 0,002 m, pak by chyba pásového měřítka byla srovnatelná s chybou měřidla a při užití vzorce (III.25) by celková chyba dala 0,003 m a při užití vzorce (III.26) bychom dostali realističtější hodnotu 0,002 m.

Shrneme postup při zpracování přímého měření veličiny a .

Postup I.

1. Měřením získáme soubor hodnot a_1, a_2, \dots, a_M .
2. Vyloučíme ojedinělé hodnoty, které se od ostatních výrazně liší a o nichž lze předpokládat, že jsou zatíženy hrubými chybami.
3. Ze zbylých N hodnot a_1, a_2, \dots, a_N vypočteme *aritmetický průměr* (III.17)

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots + a_N}{N}$$

a *střední kvadratickou chybu aritmetického průměru* ((III.20) resp. (III.24))

$$s_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^2} \quad .$$

4. Není-li chyba měřidla Δy_p zanedbatelná vůči $s_{\bar{a}}$, vypočteme *celkovou chybu měření* dle (III.25)

$$u_{\bar{a}} = s_{\bar{a}} + \Delta y_p \quad ,$$

případně při blízkých hodnotách obou chyb dle (III.26),

$$u_{\bar{a}} = \sqrt{(s_{\bar{a}})^2 + (\Delta y_p)^2} \quad .$$

5. Výsledek měření veličiny a zapíšeme ve tvaru

$$a = \bar{a} \pm u_{\bar{a}} \quad ,$$

při čemž chybu udáme na jedno platné místo a řád chyby nám udá poslední platné místo, které pro \bar{a} vypisujeme, tedy např.

$$a = (0,996 \pm 0,003) \text{ m}$$

nebo též

$$a = (996 \pm 3) \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad .$$

K provedení právě popsaného postupu lze užít elektronický kalkulátor, který má zabudovaný statistický mód. V tomto módu vložíme do kalkulátoru hodnoty a_1, a_2, \dots, a_N , tj. naměřené hodnoty po vyloučení hodnot zatížených hrubými chybami. Programy kalkulátoru pak pouhým stisknutím příslušných tlačítek nám udají *aritmetický průměr* vložených hodnot a *střední kvadratickou chybu jednoho měření* (III.18). Je možné zjistit i další statistické charakteristiky souboru a_1, a_2, \dots, a_N . Mezi standardně dostupnými charakteristikami souboru nebývá *střední kvadratická chyba aritmetického průměru* (III.20); tu je nutno získat z (III.18), které na kalkulátorech bývá označováno jako *standard deviation* σ_{n-1} , násobením faktorem $1/\sqrt{N}$.

Přistoupíme ke stanovení chyby *nepřímých měření*. Jako nepřímá označujeme taková měření, kdy měřená veličina a závisí na více měřených veličinách x_i . Příkladem může být stanovení *modulu pružnosti v tahu* (*Youngova modulu*) E z prodloužení Δl při daném zatížení F (viz úl. č. 2). Z Hookova zákona plyne pro E vyjádření

$$E = \frac{Fl}{S \Delta l} \quad , \quad (\text{III.27})$$

kde F je síla působící na drát, l je původní délka drátu, S plocha průřezu drátu. Tyto veličiny spolu s prodloužením drátu Δl jsou přímo měřenými veličinami a E je závislá, nepřímo měřená veličina. Obecně při *nepřímých měřeních* je měřená veličina a funkcí *přímo měřených veličin* x_i ;

$$a = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{III.28})$$

a její celková chyba $u_{\bar{a}}$ souvisí s celkovou chybou přímých měření u_{x_i} vztahem analogickým rovnicí (III.7)

$$u_{\bar{a}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (u_{\bar{x}_1})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (u_{\bar{x}_2})^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 (u_{\bar{x}_n})^2} \quad . \quad (\text{III.29})$$

Celkové chyby přímo měřených veličin $u_{\bar{x}_i}$ stanovíme z náhodných chyb měření těchto veličin a z chyb k přímým měřením použitých přístrojů (viz rovnice (III.25) resp. (III.26) a bod 4. **Postupu I**). Míry závislosti $\partial f/\partial x_i$ měřené veličiny na jednotlivých přímo měřených veličinách lze spočítat, protože funkce (III.28) při nepřímých měřeních je udána. Do obecného výsledku lze pak dosadit hodnoty změřených veličin x_i . Rovnice (III.7) a příbuzná rovnice (III.6) byly pro různé typy funkcí f blíže rozebrány v článku 2. Závěry tam učiněné pro odhad chyby před měřením lze většinou převést i na právě probíraný odhad chyby nepřímých měření. Např. celková relativní chyba výsledku rozdílového měření může být podstatně vyšší, než jsou relativní celkové chyby přímo měřených veličin, jejichž rozdíl se stanovuje.

Odhad celkové chyby veličiny a získané jako výsledek nepřímého měření lze provést přímo dle vzorce (III.29). Jedná se však o velmi pracný výpočet, při jehož provedení je vysoká pravděpodobnost vzniku i řádové chyby. Zpravidla je však možné výpočet podstatně zjednodušit, často dokonce převést jen na zjištění příspěvku jedné nejhůře měřitelné veličiny k celkové chybě výsledku. Tento příspěvek bývá tak dominantní, že jej lze s celkovou chybou výsledku ztotožnit, uvážíme-li přibližnost odhadu chyby. Prvním zjednodušením je náhrada vzorce (III.29) vzorcem analogickým (III.6)

$$u_{\bar{a}} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| u_{\bar{x}_1} + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| u_{\bar{x}_2} + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| u_{\bar{x}_n} \quad . \quad (\text{III.30})$$

Odhad $u_{\bar{a}}$ dle (III.30) je vyšší než dle (III.29). Rozdíl je největší, když příspěvky k chybě od jednotlivých veličin jsou stejné. Pro n veličin je pak odhad dle (III.30) (n/\sqrt{n}) - násobkem odhadu dle (III.29), tedy např. pro stejné příspěvky od čtyř veličin je dvojnásobkem. Větší počet stejných příspěvků při nepřímých měřeních se vyskytne málokdy, a proto většinou lze při odhadu chyby nahradit vzorec (III.29) jednodušším vzorcem (III.30). I když tento odhad bude v nepříznivých případech až o několik desítek procent vyšší, bude dostačující, protože při odhadu chyby jde především o její řádovou velikost. Na výše zmíněném příkladu určení modulu pružnosti v tahu E z protažení drátu v uspořádání odpovídajícímu úloze č. 2 těchto skript ukážeme, jak se postupuje při zpracování nepřímých měření.

Modul pružnosti E je dán vzorcem (III.27). Ten ještě upravíme na tvar funkce (III.28) tím, že plochu průřezu drátu S vyjádříme pomocí přímo měřeného průměru drátu d ; $S = \pi d^2/4$. Dostaneme

$$E = \frac{4Fl}{\pi d^2 \Delta l} \quad , \quad (III.31)$$

což je pro tento případ konkrétní tvar funkce (III.28)

$$E = E(F, l, d, \Delta l) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad . \quad (III.32)$$

Ukážeme postup při stanovení modulu E a jeho chyby, jestliže jsme dostali následující výsledky přímých měření veličin vyskytujících se ve vztahu (III.31).

Síla F byla dána hodnotou použitých závaží. Ta byla realizována sadou válečků s háčky a jejich hmotnost 100 g je dodržena s chybou $\Delta y_{p,m} = 0,5$ g. Měření bylo zpracováno metodou postupných měření (viz např. [1], str. 52–55) a tak byla získána sada hodnot prodloužení Δl odpovídající zatížení pěti válečků, tj. zatížení silou $F = 5$ N s chybou, která v tomto případě je dána jen chybou závaží (přístroje) $\Delta y_{p,F} = \sqrt{5(\Delta y_{p,m} g)^2} \doteq \sqrt{5 \cdot 10^{-6}} \text{ N} \doteq 2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$. Pro sílu F tak přímým měřením dostáváme vyjádření

$$F = (5,000 \pm 0,002) \text{ N}, \text{ tedy celková chyba určení } F, u_{\bar{F}} = 2 \cdot 10^{-3} \quad . \quad (III.33)$$

Délka drátu byla změřena pásovým měřítkem a výsledek měření bylo možno zapsat ve tvaru

$$l = (1,0823 \pm 0,0007) \text{ m}, \text{ tedy celková chyba určení } l, u_{\bar{l}} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad . \quad (III.34)$$

K hodnotě této chyby se dospělo sečtením chyby přístroje (pásové měřítko)

$\Delta_{p,l} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ a střední kvadratické chyby měření $s_{\bar{l}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

Průměr drátu byl stanoven mikrometrickým šroubem, přičemž střední kvadratická chyba měření $s_{\bar{d}} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ a chyba přístroje $\Delta y_{p,d} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ dávají dle (III.26) po zaokrouhlení celkovou chybu $u_{\bar{d}} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Zde je na místě přesnější odhad dle (III.26), protože právě tato hodnota se ukáže jako rozhodující pro přesnost celého měření modulu E . Výsledek měření průměru drátu bylo možno zapsat v tvaru

$$d = (212 \pm 6) \cdot 10^{-6} \text{ m}, \text{ tedy celková chyba určení } d, u_{\bar{d}} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad . \quad (III.35)$$

Prodloužení drátu bylo stanoveno indikátorovými hodinkami (úchytkoměrem) a výsledek bylo možno zapsat ve tvaru

$$\Delta l = (792 \pm 7) \cdot 10^{-6} \text{ m}, \text{ tedy celková chyba určení } \Delta l, u_{\bar{\Delta l}} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad . \quad (III.36)$$

Tato celková chyba se vypočetla ze zjištěných hodnot střední kvadratické chyby

$s_{\bar{\Delta l}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ a chyby přístroje (indikátorových hodinek) $\Delta y_{p,\Delta l} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ užitím vzorce (III.26), který zde byl použit místo pouhého sečtení chyb, protože chyby jsou stejně velké.

Abychom mohli použít vzorec (III.29) pro stanovení celkové chyby měření modulu E , musíme ještě stanovit hodnoty parciálních derivací funkce (III.29) pro zjištěné hodnoty $F, l, d, \Delta l$. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial E}{\partial F} = \frac{4l}{\pi d^2 \Delta l} = 3,9 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial E}{\partial d} = \frac{-8Fl}{\pi d^3 \Delta l} = -1,8 \cdot 10^{15} \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} \quad (III.37)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial E}{\partial l} = \frac{4Fl}{\pi d^2 \Delta l} = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} = \frac{\partial E}{\partial(\Delta l)} = \frac{-4Fl}{\pi d^2 (\Delta l)^2} = -2,4 \cdot 10^{14} \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}$$

Hodnoty z rovnic (III.33) až (III.37) dosadíme do rovnice (III.29), abychom dostali celkovou chybu stanovení modulu E ;

$$\begin{aligned} u_{\bar{E}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial F}\right)^2 (u_{\bar{F}})^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial l}\right)^2 (u_{\bar{l}})^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d}\right)^2 (u_{\bar{d}})^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial(\Delta l)}\right)^2 (u_{\bar{\Delta l}})^2} = \\ &= \sqrt{(3,9 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-3})^2 + (1,8 \cdot 10^{11} \cdot 7 \cdot 10^{-4})^2 + (1,8 \cdot 10^{15} \cdot 6 \cdot 10^{-6})^2 + (2,4 \cdot 10^{14} \cdot 7 \cdot 10^{-6})^2} \text{ Pa} = \\ &= \sqrt{(0,006 + 0,016 + 116,6 + 2,8) \cdot 10^{18}} \text{ Pa} = 10,9 \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

Z hodnot uvedených v (III.33) až (III.36) vypočteme dle (III.31) hodnotu modulu;

$$E = \frac{4Fl}{\pi d^2 \Delta l} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 1,082}{3,142 \cdot (212 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 792 \cdot 10^{-6}} = 1,935 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad . \quad (\text{III.39})$$

Tutu hodnotu s uvážením vypočtené velikosti její celkové chyby (III.38) zapíšeme jako konečný výsledek úlohy v tvaru

$$E = (1,9 \pm 0,1) \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad . \quad (\text{III.40})$$

Pro zvýraznění je vhodné jej podtrhnout.

Pohled na výpočet poměrně značné chyby měření, která činí platnými jen dvě číslice ve vyjádření modulu E , ukazuje (viz (III.38)), že naprosto dominantní roli pro přesnost měření hraje určení průměru drátu, tj. třetí člen pod odmocninou. Kdybychom do celkového výsledku započítali jen tento člen, bude chyba dána jeho neumocněnou hodnotou, $u_{\bar{E}} = 1,8 \cdot 10^{15} \cdot 6 \cdot 10^{-8} \text{ Pa} = 10,8 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, která se liší od hodnoty vypočtené dle (III.38) o 1%, což je pro určení chyby zcela bezvýznamné. Když si tuto skutečnost včas uvědomíme, můžeme celý výše uvedený pracný výpočet nahradit jen výpočtem příspěvku $|\partial E / \partial d| u_{\bar{d}}$ od měření průměru d k celkové chybě měření E . Systematicky k tomuto závěru můžeme dojít, nahradíme-li odhad chyby dle vzorce (III.29) odhadem dle (III.30) a uvědomíme-li si, že vzorec pro výpočet E je typu (III.9) a že tedy pro relativní celkovou chybu E můžeme psát vyjádření

$$\frac{u_{\bar{E}}}{E} = \frac{u_{\bar{F}}}{F} + \frac{u_{\bar{l}}}{l} + 2 \frac{u_{\bar{d}}}{d} + \frac{u_{\bar{\Delta l}}}{\Delta l} = 4 \cdot 10^{-4} + 7 \cdot 10^{-4} + 5,7 \cdot 10^{-2} + 8,8 \cdot 10^{-3} = 6,7 \cdot 10^{-2} \quad . \quad (\text{III.41})$$

Tento odhad je poněkud vyšší a též vliv posledního členu se zdá významnější než při odhadu dle (III.29), jak odpovídá vztahu mezi oběma odhady. Zde vypočtená relativní chyba 6,7% dává absolutní chybu (viz (III.39)) $u_{\bar{E}} = 13,0 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, tedy hodnotu o $2,1 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ vyšší než při výpočtu v (III.38), ale ani tento rozdíl neovlivní standardní psaní zápisu výsledku (III.40). Přitom stanovení celkové chyby výsledku postupem dle (III.41) je podstatně méně pracné než její stanovení dle (III.29).

Shrňme nyní postup při zpracování *nepřímého měření* veličiny a , tj. měření, kdy veličina a je známou funkcí $a = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n přímo měřených veličin x_1, x_2, \dots, x_n .

Postup II

1. Zjistíme hodnoty a celkové chyby přímo měřených veličin dle **Postupu I**. Získáme tak jejich vyjádření ve tvaru

$$x_i = \bar{x}_i \pm u_{\bar{x}_i}$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$, tj. pro všechny přímo měřené veličiny.

2. Zjištěné nejpravděpodobnější hodnoty (aritmetické průměry přímo naměřených hodnot) veličin \bar{x}_i dosadíme do známé funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a vypočteme nejpravděpodobnější hodnotu nepřímo měřené veličiny a jako

$$\bar{a} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad .$$

3. Určíme celkovou chybu stanovení veličiny a dle vzorce (III.29)

$$u_{\bar{a}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (u_{\bar{x}_1})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (u_{\bar{x}_2})^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 (u_{\bar{x}_n})^2}$$

v případě, kdy více výrazů $(\partial f/\partial x_i) u_{\bar{x}_i}$ má blízké hodnoty (za blízké hodnoty lze považovat hodnoty, které se liší méně než o 100%). V ostatních případech lze buď užít pro výpočet jednodušší vzorec (III.30)

$$u_{\bar{a}} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| u_{\bar{x}_1} + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| u_{\bar{x}_2} + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| u_{\bar{x}_n}$$

nebo, když jeden z výrazů $|\partial f/\partial x_i| u_{\bar{x}_i}$ výrazně převyšuje ostatní, lze jeho hodnotu již přímo pokládat za dostatečně dobře stanovenou celkovou chybu výsledku $u_{\bar{a}}$. (Za výrazné převyšování lze rozhodně pokládat řádové převyšování, často ale stačí převýšení o několik set procent.)

Když funkce f má často vyskytující se tvar (III.9), lze upravit vzorec (III.30) na pro výpočet výhodný tvar: *relativní chyba určení měřené veličiny se rovná lineární kombinaci relativních chyb měřených veličin* (srovn. (III.41)).

4. Výsledek měření veličiny a zapíšeme ve tvaru

$$a = \bar{a} \pm u_{\bar{a}} \quad ,$$

přičemž chybu udáme na jedno platné místo a řád chyby nám udá poslední platné místo, které pro \bar{a} vypisujeme.

Při měření ve fyzikálním praktiku, kde se zpravidla měří veličiny, jejichž správná hodnota je známá, zbývá ještě porovnání výsledku měření získaného **Postupem I** nebo **II** se správnou hodnotou veličiny, kterou je možné najít ve fyzikálních tabulkách. Je-li tabelovaná hodnota v intervalu $(\bar{a} \pm u_{\bar{a}})$, je vše v pořádku a v závěru zprávy o měření lze konstatovat, že výsledek našich měření se s tabulkovou hodnotou *shoduje v mezích pozorovacích chyb*. V opačném případě je třeba hledat příčinu neshody. Bývá způsobena buď hrubou nebo systematickou chybou měření. Je-li příčina takové chyby známá, je vhodné ji v závěru zprávy o měření uvést. Velmi často však nevíme, proč k neshodě došlo. Potom je vždy lépe přiznat, že důvod neshody je neznámý a že měření nedopadlo dobře, než si vymýšlet důvody typu špatných míčků a nevhodného větru, kterými vysvětlují rádi své neúspěchy hráči tenisu.

4. Stanovení funkcí vystihujících závislosti fyzikálních veličin

Přistoupíme nyní k rozboru druhé často se vyskytující měrné úlohy, kterou je stanovení závislosti jedné fyzikální veličiny na druhé. Takový charakter má např. úloha č. 9 (Závislost odporu termistoru na teplotě) a úloha č. 12 (Měření voltampérové charakteristiky polovodičové diody). V souladu s obsahem kapitoly III. si budeme všimnout toho, jak z naměřených hodnot najdeme pravděpodobný průběh závislosti a jak stanovíme míru věrohodnosti nalezené závislosti.

Měřením zjistíme N dvojic hodnot nezávisle proměnné x a závisle proměnné y ;

$$x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_N, y_N \quad . \quad (III.42)$$

Nezávisle proměnnou veličinou je ta, kterou při měření nastavujeme – ve shora uvedených příkladech teplota, resp. elektrické napětí – a závisle proměnnou veličinou ta, jejíž hodnotu při daném nastavení hledáme – odpor, resp. elektrický proud. Z dvojic (III.42) se snažíme najít průběh funkční závislosti

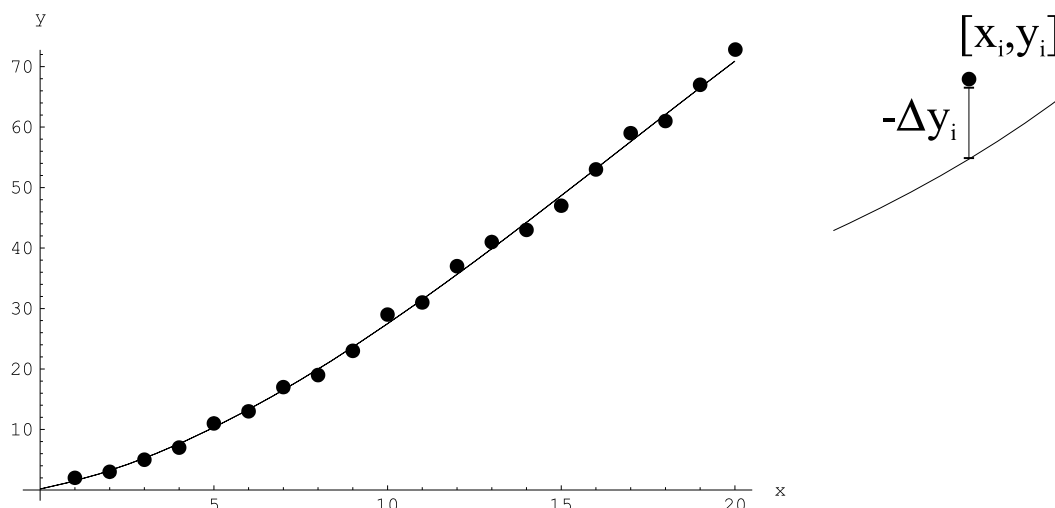
$$y = f(x) \quad . \quad (\text{III.43})$$

Taková úloha je nejednoznačná, protože z konečného počtu N dvojic x_i, y_i se snažíme určit spojitou funkci $y = f(x)$. Při přesném vyslovení nebo i jen tušení dalších podmínek se však stane řešitelnou. Přesné vyslovení se týká případu, kdy předpokládáme tvar funkční závislosti, např. že závislost je lineární, exponenciální, daná polynomem druhého stupně. Funkční závislost $y = f(x)$ pak závisí na několika málo parametrech, zpravidla na podstatně méně, než je počet změřených dvojic N , a úloha ji stanovit se stává statistickou úlohou, kde hledáme nejpravděpodobnější hodnoty parametrů a určujeme pravděpodobné chyby jejich stanovení, případně jiné míry kvality toho, jak dobře nalezená funkce vystihuje soubor dvojic (III.42). Takovou, v tomto případě nejčastěji udávanou, mírou je *korelační koeficient*

$$r = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{\sqrt{[N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2][N \sum_{i=1}^N y_i^2 - (\sum_{i=1}^N y_i)^2]}} \quad . \quad (\text{III.44})$$

Definiční rovnice (III.44) je jednoznačným předpisem, jak z hodnot (III.42) r spočítat. Korelace je mírou vzájemné svázanosti dvou náhodných jevů; jsou-li náhodné jevy zcela nezávislé, je korelační koeficient nulový, $r = 0$, jsou-li náhodné jevy zcela závislé je korelační koeficient roven jedné; $r = 1$. V uvažovaném případě prokládání naměřených bodů (III.42) funkční závislostí $y = f(x)$ znamená hodnota korelačního koeficientu $r = 1$, že všechny body $[x_i, y_i]$ přesně leží na křivce odpovídající funkci $y = f(x)$. Odchylka r od hodnoty 1 je mírou rozptylu bodů kolem funkční křivky.

Tušení dalších podmínek, kterou se úloha najít tvar funkce (III.43) z naměřených hodnot (III.42) stává řešitelnou, se užívá při grafickém zpracování úlohy. Užíváme při něm zpravidla pravoúhlý souřadnicový systém, do něhož vyneseme N bodů odpovídajících dvojicím hodnot (III.42). Na vodorovnou osu (osu úseček) nanášíme hodnoty x_i nezávisle proměnné veličiny a odpovídající hodnotu y_i vyneseme na svislou osu (osu pořadnic). Při kreslení grafů je třeba dodržet formální požadavky uvedené v části I.D. na str. 9–10 těchto skript. Na nakresleném grafu (viz obr. III.4) bude soubor bodů v rovině, kterými zkušený fyzik proloží křivku a závislost vyjádřenou touto křivkou dále diskutuje, přičemž především hledá příčiny naměřeného průběhu.



Obr. III.4. Křivka proložená naměřenými body

Důležité je, že proloží-li stejnými body křivku jiný zkušený fyzik, obě získané křivky se budou velmi málo lišit. Oba totiž intuitivně tuší podmínky, které je nutno při proložení dodržet, např. že

experimentální body mají být vyváženě rozloženy kolem křivky, že křivka má být přiměřeně hladká, že má poněkud, ale ne mnoho, přesahovat obor, kde byla stanovena hodnota nezávisle proměnné. Kvantifikovat a převést tyto intuitivní zkušenosti do matematicky přesně formulované úlohy, jak nejlhodněji proložit křivku danými body, je velmi obtížné. V dále uvedených metodách řešení této úlohy (metoda nejmenších čtverců, metoda skupinová, regrese) je totiž vždy nutno předpokládat, jaký funkční tvar (zda je to přímka, exponenciála, polynom n -tého stupně) má hledaná křivka, což při intuitivním proložení naměřených bodů nutné není. Proto intuitivní metoda proložení zůstane často užívanou metodou prezentace experimentálně získaných výsledků, zvláště ve fázi výzkumu, kdy ještě není znám teoreticky podložený funkční tvar závislosti. I tuto intuitivní metodu počítačové programy užívané pro kreslení grafů simulují zaváděním různých vyrovnávacích programů na prokládání naměřených bodů křivkami. Tyto programy jsou však interaktivní a uživatel nakonec podle své intuice – podle toho, jak se mu proložení líbí – vybere program a nastaví v něm parametry.

Máme-li rozumný důvod předpokládat funkční tvar měřené závislosti, např. lineární závislost Δl na F při měření modulu pružnosti (úl. č. 2) nebo exponenciální závislost odporu termistoru na teplotě uvažovanou v úl. č. 9, můžeme při zpracování souboru naměřených dvojic hodnot (III.42) užít některou objektivní metodu (výše popsaná intuitivní metoda je subjektivní) nalezení parametrů předpokládaného funkčního tvaru závislosti. Tyto metody vycházejí z předpokladu, že nejlepším proložením je taková křivka, pro kterou součet čtverců odchylek Δy_i naměřených bodů od funkčního průběhu je nejmenší:

$$\sum_{i=1}^N (\Delta y_i)^2 \text{ je minimální.} \quad (\text{III.49})$$

Vyjde-li se přímo z tohoto předpokladu, mluvíme o metodě *nejmenších čtverců*. Použijeme-li jistého zjednodušení spočívajícího v tom, že soubor naměřených dvojic rozložíme do několika skupin, s kterými potom dále hledáme nejmenší odchylky, mluvíme o *metodě skupinové*. Zpracovávat závislosti je též možno *metodou postupných měření*, při kterých lze též hledat numericky stupeň derivace, který je konstantní, a tak z měření určit (nejednoznačně) stupeň polynomu, kterým je vhodné proložit naměřené body. Teorie uvedených metod je obtížná a jejich aplikace pracná. Blíže se s nimi lze seznámit v knihách [1], [2], [3]. Zde pouze naznačíme postup *metody nejmenších čtverců* při prokládání naměřených bodů (III.42) $[x_i, y_i]$ přímkou $y = A + Bx$, tedy postup, který se nazývá *lineární regrese*.

Při použití metody nejmenších čtverců na lineární regresi bodů (III.42) postupujeme následovně. Nejprve určíme odchylky Δy_i funkčních hodnot y prokládané přímky

$$y = A + Bx \quad (\text{III.46})$$

od naměřených hodnot y_i ;

$$\Delta y_i = y - y_i = A + Bx_i - y_i \quad (\text{III.47})$$

Na součet čtverců odchylek Δy_i aplikujeme podmínku (III.45). Součet čtverců odchylek $\sum_{i=1}^N (\Delta y_i)^2$ je funkcí dvou proměnných A, B ; $\sum_{i=1}^N (\Delta y_i)^2 = f(A, B)$. Tuto funkci dostaneme, když umocníme na druhou rovnice (III.47) a sečteme je;

$$\sum_{i=1}^N (\Delta y_i)^2 = f(A, B) = B^2 \sum_{i=1}^N (x_i)^2 + N A^2 + \sum_{i=1}^N (y_i)^2 + 2AB \sum_{i=1}^N x_i - 2B \sum_{i=1}^N x_i y_i - 2A \sum_{i=1}^N y_i \quad (\text{III.48})$$

Extrém funkce, zde minimum, nastane, když její parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial A}$, $\frac{\partial f}{\partial B}$ budou rovny nule. Z (III.48) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial A} &= 2NA + 2B \sum x_i - 2 \sum y_i \\ \frac{\partial f}{\partial B} &= 2B \sum (x_i)^2 + 2A \sum x_i - 2 \sum x_i y_i \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

Položíme-li tyto partiální derivace rovny nule, dostaneme dvě rovnice pro dvě neznámé A , B a jejich řešením získáme pro A a B vyjádření

$$A = \frac{\sum(x_i)^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum(x_i)^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum y_i - B \sum x_i}{N}, \quad (\text{III.50})$$

$$B = \frac{N \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i}{N \sum(x_i)^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Získáme tak pořadnici A a směrnici B přímky $y = A + Bx$ (III.26), která nejlépe prokládá naměřené body (III.42). Vzorce (III.50) jsou užity při lineární regresi programované v kalkulátorech a modifikovány pro další regrese (logaritmickou, exponenciální, mocninnou), které jsou také vlastně lineárními regresemi v modifikovaných proměnných.

Z praktického hlediska je důležité, že hlavní metody proložení jednoduchých křivek naměřenými body – souborem dvojic hodnot (III.42) – patří k programovému vybavení lepších kalkulátorů a počítačových programů pro zpracování výsledků měření. Pro metody prokládání se užívá označení *regrese* a v kalkulátorech je najdeme ve statistickém módu. Programy jsou uzpůsobeny tak, že do nich vložíme dvojice hodnot (III.42) a podle zvoleného typu regrese dostaneme hodnoty parametrů funkcí, kterými závislost prokládáme a hodnotu *korelačního koeficientu* (III.46), který vystihuje, jak dobře získaná funkce experimentální body prokládá. Programy dávají i některé další charakteristiky při regresi zpracovávaného statistického souboru, např. *kritický koeficient (critical coefficient)*, který je čtvercem hodnoty korelačního koeficientu r . Kalkulátory udávají hodnoty všech regresních konstant na počet míst daný jejich konstrukcí. I zde však samozřejmě platí, že smysluplný je pouze počet míst stanovený podle výše uvedených pravidel. Proto je nutno při přepisu z kalkulátoru získané hodnoty vhodně zaokrouhlit.

V kalkulátorech bývá dostupná

- *lineární regrese* prokládající naměřené body přímkou $y = A + Bx$
- *logaritmická regrese* prokládající naměřené body závislostí $y = A + B \ln x$
- *exponenciální regrese* prokládající naměřené body závislostí $y = A e^{Bx}$
- *mocninná regrese* prokládající naměřené body závislostí $y = A x^B$

Ve všech vztazích je A označován jako konstantní člen (constant term) a B jako regresní koeficient (regression coefficient).

Dostupnost regresních programů činí z dříve velmi pracného objektivního prokládání naměřených křivek funkčními závislostmi užitečnou a rychlou metodu zpracování měřených závislostí dvou veličin, lze-li předpokládat, že závislost má podobu některé shora uvedených funkcí.

Literatura:

- [1] Brož, J. a kol.: Základy fyzikálních měření I., SPN Praha, 1983
- [2] Horák, Z.: Praktická fyzika, SNTL, Praha 1958
- [3] Sprušil, B., Zieleniecová, P.: Úvod do teorie fyzikálních měření, SPN, Praha 1989